



В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

часть I-я.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1966

77

ЛЕКЦИЯ I.

В основе классической механики лежит ряд экспериментальных фактов. Перечислим некоторые из них.

1. Принцип относительности Галилея: существуют системы координат, называемые инерциальными и обладающие следующим свойством: все законы природы во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах координат и все системы координат, движущиеся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно инерциальны.

Иначе говоря, если система координат, связанная с Землей инерциальна, то экспериментатор, находящийся в равномерно и прямолинейно движущемся относительно Земли поезде не может обнаружить движение поезда по опытам, проводящимся целиком внутри вагона.

В действительности система координат, связанная с Землей инерциальна лишь приближенно. С большей точностью инерциальны системы координат, связанные с Солнцем, со звездами и т.д.

2. Принцип детерминированности Ньютона: начальное состояние механической системы (совокупность начальных координат и скоростей точек системы) однозначно определяет дальнейшее поведение системы.

Пусть $\mathbf{x}$ - вектор $(x_1, \dots, x_{3n})$, где x_i - координаты n материальных точек, составляющих некоторую механическую систему, относительно какой-либо инерциальной системы координат. Тогда можно изображать конфигурацию такой механической системы точкой в $3n$ -мерном пространстве. Ее движение происходит по

ф. 201/30

кривой $x(t)$. Производная $\frac{dx}{dt}$ называется скоростью $\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t) = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3n})$, вторая производная $\ddot{x} = (\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_{3n})$ - ускорением.*)

Покажем, что из принципа детерминированности вытекает: ускорение определяется координатами и скоростями точек системы.

Действительно, начальное состояние системы

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=t_0} = \dot{x}_0.$$

определяет дальнейшее движение, т.е. траекторию $x = x(t; x_0, \dot{x}_0)$ при всех t , а значит и ускорение при любом t и при $t=t_0$:

$$\ddot{x}|_{t=t_0} = f(t_0; x_0, \dot{x}_0)$$

Но так как, согласно принципу относительности, в инерциальной системе координат все законы природы одинаковы в любой момент времени t_0 , функция f от t_0 явно не зависит. Итак, имеем

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Это дифференциальное уравнение является следствием принципа детерминированности, оно было положено Ньютоном в основу механики и называется уравнением Ньютона движения механических систем:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad 1)$$

*) Здесь и всегда в дальнейшем будем предполагать, что все встречающиеся функции дифференцируемы столько раз, сколько необходимо для рассуждений.

По теореме существования и единственности (Понтрягин "Обыкн. дифф. ур-ния" стр. 22) решение дифференциального уравнения I) вполне определяется $6n$ начальными условиями: $x_0, \dot{x}_0$.

Таким образом, из принципа детерминированности следует соотношение I), а из этого дифференциального уравнения вытекает принцип детерминированности. Заметим, при этом, что из дифференциального уравнения I) вытекает также и детерминированность прошлого: вся история механической системы определяется положением и скоростями ее точек в настоящем, т.е. при $t = t_0$.

Функция $f(x, \dot{x})$ в уравнении I) для конкретных механических явлений определяется экспериментально.

Примеры

1°. Падение тяжелой материальной точки у поверхности Земли. Опыт показывает, что для нее

$$\ddot{x} = -g \quad (\text{Галилей}) \quad g \approx 9,8 \text{ м/сек}^2.$$

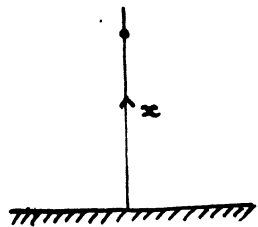
Можно ввести "потенциальную энергию" $U(x) = gx$, тогда

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad 2.)$$

В дальнейшем будет рассматриваться

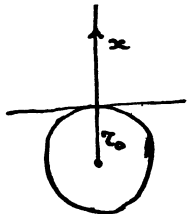
$$U = U(x_1, \dots, x_{3n})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{3n}} \right)$$



2°. Падение материальной точки с большой высоты. Экспериментальный закон движения (Ньютон): ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли:

$$\ddot{x} = -g \frac{r_0^2}{r^2}, \quad r = r_0 + x$$



Это уравнение можно записать в виде 2), где

$$U = -g z_0 \frac{1}{x + z_0}.$$

Задача. Определить, с какой начальной скоростью нужно бросить тело (точку), чтобы оно ушло от Земли на бесконечное расстояние.

3⁰ Движение грузика по прямой под действием пружины. Эксперимент показывает, что при небольших отклонениях пружины относительно ее нейтрального положения уравнение движения грузика:



$$\ddot{x} = -\lambda^2 x$$

Его также можно записать в виде 2) с $U = \frac{\lambda^2 x^2}{2}$. Если поместить два грузика, таких же, как первый, то оказывается, что при том же растяжении пружины, ускорение их в 2 раза меньше. Экспериментально установлено, что, вообще для любых двух тел отклонение ускорений $\ddot{x}_1/\ddot{x}_2$ при одинаковом растяжении постоянно. Величина, обратная этому отношению называется отношением их масс:

$$\ddot{x}_1/\ddot{x}_2 = m_2/m_1$$

За единицу массы можно принять массу произвольного пробного тела, например, 1-го литра воды. Таким образом, $m\ddot{x}$ не зависит от пробного тела, а является характеристикой растяжения пружины. Эта величина называется силой. За единицу силы принимается "ньютон"; например, сила притяжения 1-го литра воды на поверхности Земли составляет 9,81 ньютона ($= 1 \text{ кг}$).

Определение

Потенциальной системой называется система материальных точек, движение которой определяется системой дифференциальных уравнений

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

m_i - масса i -ой точки, x_i - ее координата, U - функция координат x_i , называемая потенциальной энергией системы. Такие системы называются свободными. В дальнейшем будут рассматриваться более общие системы, движение точек которых ограничено связями.

Системы с одной степенью свободы

Системой с одной степенью свободы назовем систему, описываемую одним дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f(x) \quad 3)$$

Закон сохранения энергии. Пусть точка массы m движется со скоростью v . Величина $T = \frac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией. Для точки, описываемой уравнением 3),

$$\text{при } m=1 \quad T = \frac{\dot{x}^2}{2}$$

В соответствии с формулой 2) функция

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

называется потенциальной энергией.

ТЕОРЕМА

Полная энергия $E = T + U$ при движении, $\ddot{x} = f(x)$ не изменяется.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T + U) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = \dot{x} \ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} = \\ &= \dot{x} (\ddot{x} - f(x)) = 0 \end{aligned}$$

в силу уравнения движения $\ddot{x} = f(x)$.

Плоскость с координатами $x, \dot{x}$ называется фазовой плоскостью.

Все движения нашей точки предопределено начальным положением ее на фазовой плоскости. Последовательные состояния точки определяют кривую на фазовой плоскости

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ \dot{x} &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

которое называется фазовой траекторией.

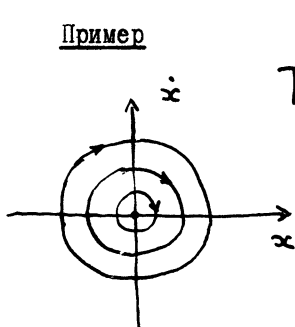
ТЕОРЕМА. Если две фазовые траектории пересекаются, то они совпадают. Это следует из теоремы существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (или из принципа детерминированности).

Следовательно, вся фазовая плоскость траекториями разбивается на классы эквивалентности (если точки лежат на одной траектории, то они принадлежат одному классу).

Полученное разбиение фазовой плоскости называется фазовым портретом системы, описываемой данным уравнением $\ddot{x} = f(x)$. По закону сохранения энергии значение E в любых двух точках фазовой траектории одинаково. Иными словами, каждая фазовая траектория принадлежит одной линии уровня функции $E(x, \dot{x})$:

$$E(x, \dot{x}) = E = \text{const.}$$

Пример



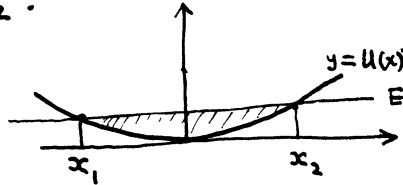
$$\ddot{x} = -x \quad T = \frac{\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{x^2}{2}, \quad E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

Из этих соотношений следует, что фазовый портрет системы — совокупность концентрических окружностей, точка по фазовой траек-

тории движется по часовой стрелке и $x, \dot{x}$ - периодические функции. Уравнение $\ddot{x} = -x$ описывает "малые колебания плоского математического маятника".

Так как $\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$, а кинетическая энергия $\frac{\dot{x}^2}{2}$ неотрицательна, то $U(x) \leq E$, т.е. движение при фиксированном E будет происходить в потенциальной яме

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$



ЛЕКЦИЯ 2.

Рассмотрим уравнение движения системы с одной степенью свободы

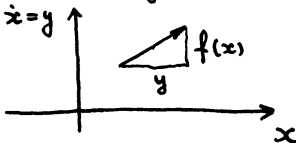
$$\ddot{x} = f(x)$$

Ему эквивалентна система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$$

4)

Эта система определяет векторное поле $(y, f(x))$ на фазовой плоскости x, y . В верхней полуплоскости все векторы поля направлены вправо, а в нижней - влево.



Напомним определение интегральных кривых системы 4) [Понтрягин "Обыкн. дифф. ур-ия", стр. 9, 109]. Кривая $M(t) = (x(t), y(t))$

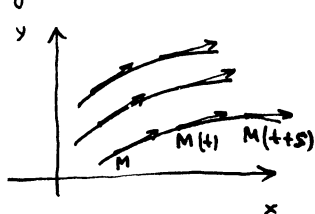
на фазовой плоскости x, y называется интегральной кривой векторного поля $A = (a(x, y), b(x, y))$, если в каждый момент времени скорость движения точки $M(t)$ по фазовой плоскости равна вектору поля в точке M :

$$\frac{dM}{dt} = A(M)$$

(т.е. $\frac{dx}{dt} = a(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = b(x, y)$.)

Таким образом, интегральные кривые поля $(y, f(x))$ не что иное, как фазовые траектории.

С помощью фазовых траекторий определяется для каждого t отображение фазовой плоскости в себя: $q^t: M \rightarrow M(t) = q^t M$, переводящее фазовую точку $M = M(0)$ в точку



$M(t)$ на той же фазовой траектории. При этом $q^{t+s} = q^t \cdot q^s$

[Понтрягин, там же, стр. 105].

Преобразование $q^0: q^0 M = M$

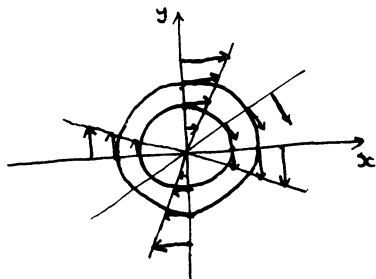
— тождественное, а преобразова-

ние обратное к q^t есть $(q^t)^{-1} = q^{-t}$.

Итак, q^t представляет собой однопараметрическую преобразований фазовой плоскости. Эта группа называется фазовым потоком.

Пример

$$\ddot{x} = -x \iff \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$



Фазовый портрет этой системы — множество концентрических окружностей, касающихся векторов поля, которые в любой точке

перпендикулярны радиусу-вектору, проведенному в эту точку, а по величине с ним одинаковы. Начало координат соответствует минимуму потенциальной энергии системы - состоянию покоя, и является фазовой траекторией, отвечающей нулевым начальным условиям. Фазовый поток системы есть равномерное вращение плоскости вокруг начала координат вправо с единичной угловой скоростью. Отсюда:

$$x = r_0 \cos(\varphi_0 - t)$$

$$y = r_0 \sin(\varphi_0 - t)$$

где φ_0 и r_0 - произвольные постоянные.

Можно также непосредственно найти решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y & x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ \dot{y} = -x & y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}$$

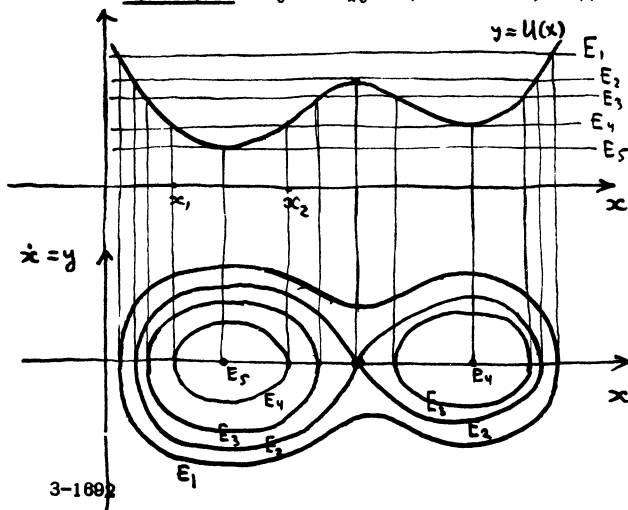
где произвольные постоянные определяются по начальным условиям.

Вид фазового портрета ясен также из закона сохранения энергии

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E$$

Это есть уравнение окружности на фазовой плоскости.

Пример 2. Пусть функция $U(x)$ задана графиком $y = U(x)$.



Нарисуем соответствующий ему фазовый портрет системы.

Из закона сохранения энергии

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = E$$

следует, что множество уровней энергии

$E < E_5$ пусто,

так как движение осуществляется лишь в области

$$U(x) \leq E$$

Уравнение фазовых траекторий имеет вид:

$$y = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$$

Неподвижные точки фазового потока называются стационарными точками. Стационарная точка является целой фазовой траекторией, т.е. определяет положение равновесия системы. В стационарных точках

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

. Фазовые траектории - гладкие кривые,

если они не проходят через стационарные точки. Это следует из теоремы о неявной функции, позволяющей локально записать уравнение траектории в виде $x = x(y)$ или $y = y(x)$ всюду, где $\frac{\partial E}{\partial x}$ и $\frac{\partial E}{\partial y}$ не обращаются в нуль одновременно.

Задача. Из ~~каких~~ фазовых траекторий состоит сепаратриса (восьмерка) - кривая соответствующая уровню E_2 ?

Задача. Определить время движения по сепаратрисе.

Время движения по фазовой траектории в одну сторону между точками x_1 и x_2 определяется так:

$$y = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U(x))} \quad x_2 \quad dx$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} \quad , \quad t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$

Задача. Пусть $S(E)$ - площадь, заключенная внутри фазовой траектории, соответствующей уровню с постоянной энергией E .

Доказать, что период T движения по этой фазовой траектории равен

$$T = \frac{dS}{dE}$$

Системы с двумя степенями свободы

Точку плоскости x_1, x_2 мы будем обозначать через τ , понимая под τ радиус-вектор точки относительно фиксированного начала координат. Движение точки по плоскости описывается уравнениями Ньютона $\ddot{x} = f(x_1, x_2)$, где $f = (f_1, f_2)$

$$\text{или } \ddot{\tau} = f(\tau) \quad \ddot{\tau} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$$

Система называется потенциальной, если существует функция $U(x_1, x_2)$, такая, что

$$(f_1, f_2) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)$$

ТЕОРЕМА. Полная энергия потенциальной системы во времени сохраняется

$$E = \frac{1}{2} \dot{\tau}^2 + U(\tau), \quad \dot{\tau}^2 = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

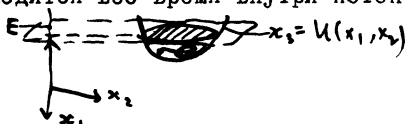
утверждается: $\frac{dE}{dt} = 0$. Доказательство:

$$\frac{dE}{dt} = (\dot{\tau}, \ddot{\tau}) + \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}, \dot{\tau}\right) = \left(\ddot{\tau} + \frac{\partial U}{\partial \tau}, \dot{\tau}\right) = 0$$

в силу уравнений движения.

Следствие. Если в начальный момент суммарная энергия равна E , то вся траектория для любого $t > t_0$ лежит в области

$U(\tau) \leq E$, т.е. точка находится все время внутри потенциальной ямы $U(x_1, x_2) \leq E$.



Всякая одномерная системы потенциальна, так как всегда можно было положить

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

Для системы с 2 степенями свободы это не так.

Задача. Привести пример системы вида $\ddot{x} = f(x_1, x_2)$, которая не является потенциальной.

Фазовое пространство.

Фазовым пространством системы с 2-мя степенями свободы называется 4-х мерное пространство $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$

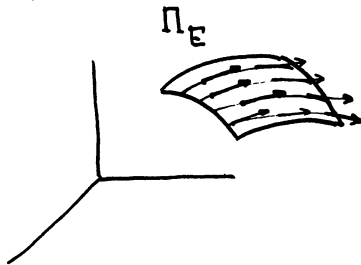
Полагая $\dot{x}_1 = y_1$, $\dot{x}_2 = y_2$ уравнение движения 3) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{\partial u}{\partial x_2} \end{cases}$$

Последняя определяет векторное поле в 4-х мерном пространстве, тем самым фазовый поток нашей системы (однопараметрическую группу преобразований 4-х мерного фазового пространства). Интегральные кривые системы суть кривые в четырехмерном фазовом пространстве, касательные к которым в каждой точке соответствуют этому полю направлений. Эти кривые называются фазовыми траекториями механической системы; они образуют разбиение фазового пространства на траектории. Проекции интегральных кривых 4-х мерного пространства на плоскость x_1, x_2 дают траектории нашей движущейся точки на плоскости x_1, x_2 . Эти траектории могут иметь точки самопересечения, тогда как фазовые траектории - несамопересекающиеся. Уравнение закона сохранения энергии

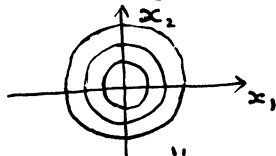
$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + u(x) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + u(x_1, x_2)$$

определяет 3-х мерную гиперповерхность в 4-х мерном пространстве: $E(x_1, x_2, y_1, y_2) = E_0$; эта поверхность Π_{E_0} остается инвариантной относительно фазового потока: $q^+ \Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}$. Иначе говоря, фазовый поток течет по поверхности уровня энергии. Фазовое векторное поле касается в каждой точке поверхности Π_E и, следовательно, вся она составлена из фазовых траекторий.



Пример. Пусть $U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

Множество уровней потенциальной энергии на плоскости x_1, x_2 будет множеством concentric окружностей



Уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

эквивалентны системе

Эта система распадается на 2-е независимых; иначе говоря, координаты x_1, x_2 меняются со временем так же, как в системе с одной степенью свободы.

Решение систем

$$\begin{aligned}x_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t & x_2 &= c_3 \cos t + c_4 \sin t \\y_1 &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t & y_2 &= -c_3 \sin t + c_4 \cos t\end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$E = \frac{1}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = \text{const.}$$

т.е. поверхностью уровня Π_E является сфера в 4-х мерном пространстве.

Задача. Доказать, что фазовые орбиты являются большими кругами этой сферы (Большим кругом называется пересечение сферы проходящей через ее центр двумерной плоскости).

Задача.* Доказать, что множество этих больших кругов составляет двумерную сферу.

Задача. Найти проекции фазовых орбит на плоскость x_1, x_2 (т.е. нарисовать траектории движения точки).

ЛЕКЦИЯ 3

ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

Рассмотрим еще один пример плоского движения ("малые колебания с двумя степенями свободы"):

$$\ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2$$

Из закона сохранения энергии следует, что если в начальный момент времени полная энергия

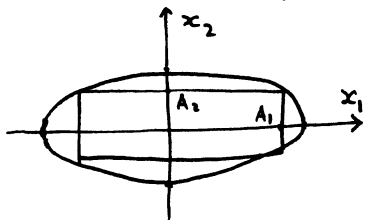
$$\frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + U(x_1, x_2) = E$$

то все движение будет происходить внутри эллипса $U(x_1, x_2) \leq E$.

Кроме того, наша система состоит из двух не связанных одномерных систем. Поэтому закон сохранения энергии выполняется отдельно для каждой из них: сохраняются величины

$$E_1 = \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} x_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2, \quad (E = E_1 + E_2)$$

Следовательно, изменение x_1 ограничено полосой $|x_1| \leq A_1$,



$A_1 = \sqrt{2E_1(0)}$, и, x_2 тоже колеблется в пределах полосы $|x_2| \leq A_2$. Пересечение этих двух полос определяет прямоугольник, в котором заключена траектория.

Задача. Доказать, что этот прямоугольник вписан в эллипс $U \leq E$.

. Общее решение наших уравнений есть $x_1 = A_1 \sin(t + \varphi_1)$,

$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$: движущаяся точка независимо совершает колебание с частотой 1 и амплитудой A_1 по горизонтали и колебание с частотой ω и амплитудой A_2 по вертикали.

Чтобы нарисовать траекторию на плоскости x_1, x_2 , поступим следующим образом. Рассмотрим цилиндр с основанием $2A_1$ и ленту ширины $2A_2$. Нарисуем на ленте синусоиду с периодом $2\pi A_1 / \omega$ и амплитудой A_2 , и намотаем ленту на цилиндр (рис. 1). Ортогональная проекция намотанной на цилиндр синусоиды на плоскость x_1, x_2

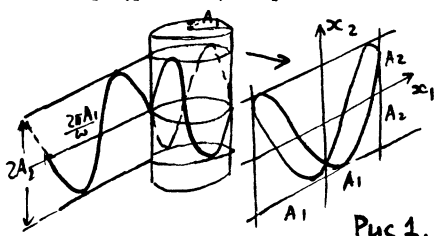
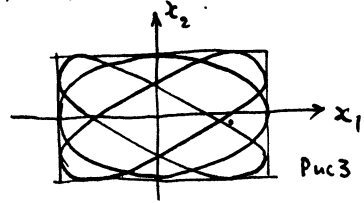
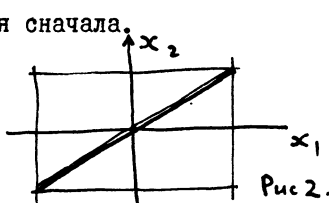


Рис. 1.

и даст искомую траекторию, называемую фигурой Лиссажу.

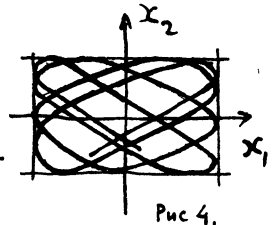
Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на осциллографе, подавая два независимых гармонических колебания на горизонтальную и вертикальную развертки.

Вид фигуры Лиссажу очень сильно зависит от частоты ω . Если $\omega = 1$ (сферический маятник лекции 2), то на цилиндре кривая — эллипс. Проекция этого эллипса на плоскость x_1, x_2 зависит от разности фаз $\varphi_2 - \varphi_1$. При $\varphi_1 = \varphi_2$ получается отрезок диагонали прямоугольника, при малых $\varphi_2 - \varphi_1$ — сжатый к диагонали эллипс, вписанный в прямоугольник. При $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ получается эллипс с главными осями x_1, x_2 , при увеличении $\varphi_2 - \varphi_1$ от $\frac{\pi}{2}$ до π эллипс сжимается ко второй диагонали, при дальнейшем увеличении $\varphi_2 - \varphi_1$ весь процесс повторяется сначала.



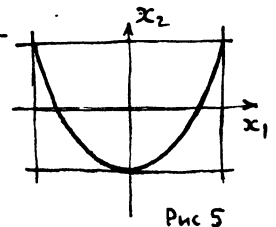
Пусть теперь частоты равны лишь приближенно: $\omega \approx 1$. Отрезок кривой, соответствующий $0 \leq t \leq 2\pi$ очень похож на эллипс. Следующий виток тоже напоминает эллипс, но у него сдвиг фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ на $2\pi(\omega - 1)$ больше, чем у исходного. Поэтому кривая Лиссажу с $\omega \approx 1$ — деформирующийся эллипс, медленно проходящий все фазы от сжатия в одну диагональ до сжатия в другую (рис. 4)

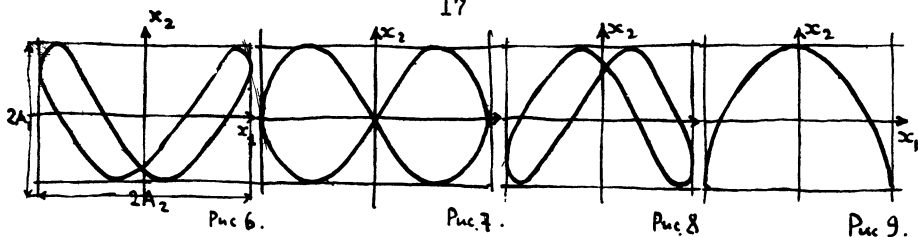
Если одна из частот вдвое больше другой ($\omega = 2$), то при некотором сдвиге фаз фигура Лиссажу превращается в дважды проиденную кривую (рис 5).



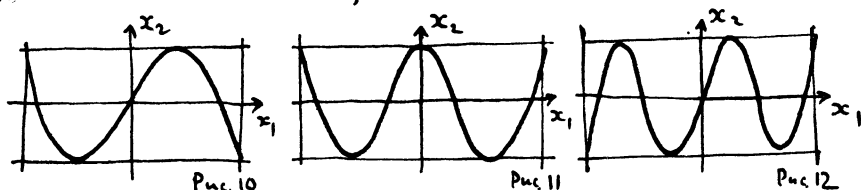
Задача. Доказать, что эта кривая — парабола.

При увеличении сдвига фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ последовательно получаем :





Вообще, если одна из частот в n раз больше другой ($\omega = n$), то среди соответствующих фигур Лиссажу есть график многочлена степени n ;



этот многочлен называется многочленом Чебышева.

Задача. Доказать, что если $\omega = m/n$ то фигура Лиссажу замкнутая кривая, а если ω иррационально, то фигура Лиссажу заполняет прямоугольник всюду плотно. Что заполняет соответствующая фазовая траектория.

Потенциальное силовое поле

Рассмотрим снова общую систему

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

Запись $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ означает, что в каждой точке плоскости; $\mathbf{z} = (x_1, x_2)$ задан вектор силы $\mathbf{f} = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. В таком случае говорят, что задано силовое векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{z})$. Важным частным случаем является потенциальное поле.

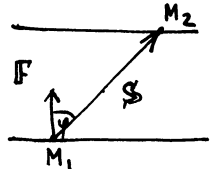
Выше мы называли систему потенциальной (поле потенциальным), если существует функция $U(x_1, x_2)$ ("потенциальная энергия") такая, что

$$f_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad f_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

При таком определении функция U и само понятие потенциального поля, кажутся зависящими от выбора системы координат. Однако, в действительности потенциальная энергия поля в данной точке есть физическая величина, и от выбора системы координат $U(r)$ не зависит: величина U и потенциальность поля допускают внутреннее, не зависящее от употребляемой системы координат определение.

Вспомним сначала определение работы силы F на пути S . Работа постоянной силы F (например, силы с которой мы тянем вверх груз) на пути $S = \overrightarrow{M_1 M_2}$ есть, по определению, скалярное произведение

$$A = (F, S) = |F| |S| \cdot \cos \varphi$$



Пусть дано векторное поле F и кривая l конечной длины. Приближим кривую l ломаной со звеньями ΔS_i и обозначим через F_i значение силы в какой-нибудь точке ΔS_i ; тогда работа поля F на пути l есть, по определению

$$A = \lim_{|\Delta S_i| \rightarrow 0} \sum (F_i, \Delta S_i)$$

(В курсе анализа доказывается, что если поле непрерывно, а путь спрямляем, то предел существует. Он обозначается

$$\int_l (F, dS).$$



ТЕОРЕМА. Векторное поле $\mathbf{F}$ потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому пути $M_1 M_2$ зависит только от концов пути и не зависит от формы пути.

Действительно, пусть работа поля $\mathbf{F}$ не зависит от пути. Тогда корректно определена функция точки M

$$U(M) = \int_{M_0}^M (\mathbf{F}, d\mathbf{s})$$

Легко проверить, что в декартовых координатах x_1, x_2

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

т.е. поле потенциально, а U - его потенциальная энергия.

Конечно, потенциальная энергия определяется только с точностью до аддитивной постоянной $U(M_0)$, которую можно выбрать произвольно.

Обратно, пусть поле задается выписанными только что формулами. Тогда легко проверяется, что

$$\int_{M_0}^M (\mathbf{F}, d\mathbf{s}) = -U(M) + U(M_0)$$

т.е. работа $\mathbf{F}$ не зависит от формы пути.

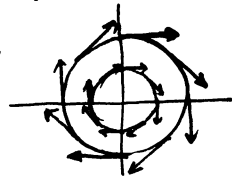
Задача. Доказать, что векторное поле

$$F_1 = x_2, \quad F_2 = -x_1 \quad \text{не потенциально.}$$

Потенциально ли поле :

$$F_1 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad F_2 = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad ?$$

Доказать, что поле потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому замкнутому контуру равна 0.



Определение. Векторное поле называется центральной, если все вектора поля лежат на лучах, проходящих через одну точку - центр поля O , а величина вектора поля в точке зависит только от расстояния точки до центра поля.

Пример. Ньютоновское поле $\mathbf{F} = -k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, центрально, а поля предыдущей задачи - нет.

ТЕОРЕМА. Всякое центральное поле $\mathbf{F}$ потенциально.

Доказательство. Пусть $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = \Phi(r)$, где $\mathbf{r}$ - радиус вектор относительно 0. Тогда

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = \int_{r(M_1)}^{r(M_2)} \Phi(r) dr$$

а этот интеграл очевидно не зависит от пути, что и требовалось доказать.

Задача. Вычислить потенциальную энергию Ньютоновского поля.

ЛЕКЦИЯ 4. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ.

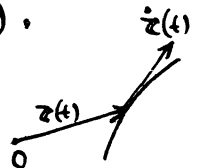
Рассмотрим движение материальной точки массы 1 в центральном поле на плоскости. Так как центральное поле потенциально,

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

Потенциальная энергия U центрального поля зависит только от $|\mathbf{r}|$, (так как работа по любой дуге окружности с центром в 0 равна 0): $U = U(|\mathbf{r}|)$

Рассмотрим два вектора: радиус вектор $\mathbf{r}(t)$, с началом в центре поля 0 и вектор скорости

$$\dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$



Определение. Моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной точки массы 1 относительно точки 0 называется векторное произведение

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$$

Замечание. Вообще, моментом вектора $\mathbf{a}$ относительно точки O называют $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$ - например, в школьном курсе статики рассматривался момент силы.

ЛЕММА. Пусть $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ - два меняющихся со временем вектора, Тогда

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t) \right] + \left[\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right]$$

Доказательство. По определению производной

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(t+\Delta t), \mathbf{b}(t+\Delta t)] &= \left[\left(\mathbf{a}(t) + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t + o(\Delta t) \right), \left(\mathbf{b}(t) + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \Delta t + o(\Delta t) \right) \right] \\ &= [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)] + \left[\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right] \Delta t + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t) \right] \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА. (Закон сохранения кинетического момента).

при движении в центральном поле кинетический момент относительно центра поля $\mathbf{M}$ не меняется со временем.

Доказательство. По определению

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$$

По лемме

$$\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{r}}]$$

Из уравнений движения ввиду центральности поля, видно, что вектора $\ddot{\mathbf{r}}$ и $\mathbf{r}$ коллинеарны. Итак, $\dot{\mathbf{M}} = 0$, $\mathbf{M} = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Впервые закон сохранения кинетического момента был найден Кеплером из эксперимента. Кеплер формулировал этот закон в несколько ином виде.

Введем на нашей плоскости полярные координаты r, φ с полюсом в центре поля O . Рассмотрим

в точке τ с координатами $|\tau| = r, \varphi$
 два орта: e_r направленный по радиус-
 вектору, так что

$$\tau = r e_r$$

и e_φ - ему перпендикулярный, направленный в сторону увели-
 чения φ . Разложим вектор скорости $\dot{\tau}$ по базису e_r, e_φ

ЛЕММА. Справедливо соотношение

$$\dot{\tau} = \dot{r} e_r + r \dot{\varphi} e_\varphi$$

Доказательство. Очевидно, вектора e_r, e_φ вращаются с угловой скоростью $\dot{\varphi}$,
 т.е.

$$\dot{e}_r = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_r$$

Дифференцируя равенство $\tau = r e_r$ получаем

$$\dot{\tau} = \dot{r} e_r + r \dot{e}_r = \dot{r} e_r + r \dot{\varphi} e_\varphi$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, кинетический момент есть

$$M = [\tau, \dot{\tau}] = [\tau, \dot{r} e_r] + [\tau, r \dot{\varphi} e_\varphi] = r \dot{\varphi} [\tau, e_\varphi] = r^2 \dot{\varphi} [e_r, e_\varphi]$$

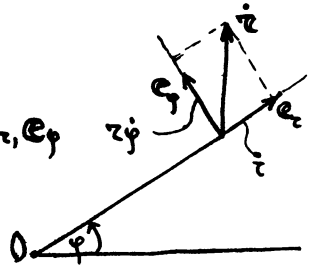
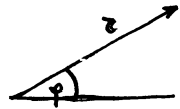
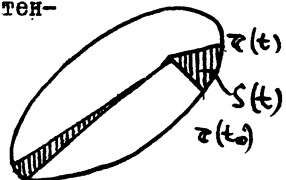
Таким образом, сохраняется величина

$$M = |M| = r^2 \dot{\varphi}$$

Эта величина имеет простой геометрический смысл.

Кеплер назвал секторальной скоростью C
 скорость изменения площади $S(t)$, заметен-
 ной радиус-вектором

$$C = \frac{dS}{dt}$$



Найденный им из наблюдений движения планет закон гласит:

Закон Кеплера

В равные времена радиус вектор заметает равные площади, так что секториальная скорость постоянна: $\frac{dS}{dt} = 0$.

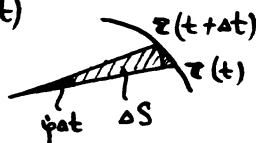
Это - одна из формулировок закона сохранения кинетического момента. Ибо

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \Delta t + o(\Delta t)$$

и, значит, секториальная скорость

$$C = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} M$$

вдвое меньше кинетического момента нашей точки массы I , и, следовательно, постоянна.



Интегрирование уравнений движения в центральном

поле.

Ввиду вращательной симметрии, интегрировать уравнения движения в центральном поле $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$, где $U = U(r)$ естественно в полярных координатах

По доказанной выше лемме

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

Дифференцируя, находим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

И так как, ввиду центральности поля

$$-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r$$

то в полярных координатах уравнения движения принимает вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

Но из закона сохранения кинетического момента

$$r^2\dot{\varphi} = M, \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}$$

где M определяется начальными условиями и постоянно для каждой орбиты. Поэтому

$$\ddot{r} = -\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4}$$

или

$$\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{где} \quad V = u + \frac{M^2}{2r^2}$$

Тем самым доказана

ТЕОРЕМА. При движении материальной точки массы I в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V(r) = u(r) + \frac{M^2}{2r^2}$$

Величина $V(r)$ называется эффективной потенциальной энергией.

Замечание.

Полная энергия в полученной одномерной задаче

$$E_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r)$$

совпадает с полной энергией в исходной задаче

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + u(r)$$

Ибо

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2r^2}$$

Подписано к печати 26/III 1966 г.	Л-45219	Формат 60×90/16
Физ. печ. л. 1,5	Уч.-изд. л. 1,15	Зак. 1692 Тираж 550 экз. Цена 3 коп.

Издательство Московского университета.
Москва, Ленинские горы, Административный корпус.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

Цена 3 коп.